04/03/2020

Λέσχη Μαθηματικών Αύριο 14:00

Υπενθύμιση: Έστω G ομάδα. H υποσύνολο της G. Η H λέγεται υποομάδα αν $e_G \in H$, $a, b \in H$ συνεπάγεται $a.b \in H$ και $a \in H$ συνεπάγεται $a^{-1} \in H$.

Πρόταση: Έστω H υποομάδα της G. Τότε ο περιορισμός της πράξης $*$ της G στο H, κάνει την H ομάδα, με ουδέτερο το e_G (δηλαδή $e_H = e_G$) και αν $a \in H$ το αντίστροφο του a στην ομάδα $(H, *)$ είναι το ίδιο με το αντίστροφο του a στην G.

Απόδειξη: Αφού $a, b \in H$ συνεπάγεται $a * b \in H$. Ο περιορισμός της πράξης της G στο H είναι πράξη H. Αφού $e_G * a = a * e_G = a$ για κάθε $a \in G$ και $e_G \in H$ έπεται e_G ουδέτερο για την πράξη $(H, *)$. Αφού η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική έχουμε $a*(b*c) = (a*b)*c$ για κάθε $a, b, c \in G$. Άρα η πράξη $*$ στο H είναι προσεταιριστική.
Τέλος, έστω $a \in H$ και a^{-1} ο αντίστροφος του a στην G. Τότε $a * a^{-1} = e_G = a^{-1} * a$. Αφού H υποομάδα της G και $a \in H$ έχουμε $a^{-1} \in H$. Άρα το $a \in H$ έχει αντίστροφο στο $(H, *)$ το a^{-1}. Συνεπώς $(H, *)$ ομάδα.

Παρατήρηση: Άρα κάθε υποομάδα της G είναι ομάδα με τον περιορισμό της πράξης.

Πρόταση: Έστω $(G, *)$ και H υποσύνολο της G. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
1) H υποομάδα της G
2) $H \neq \emptyset$ και $a, b \in H$ συνεπάγεται $ab^{-1} \in H$
Απόδειξη: (1)⇒(2) Έστω H υποομάδα της G. Άρα $e_G \in H$, συνεπώς $H \neq \emptyset$.

Απόδειξη: 1) ⇒ 2). Έστω H υποομάδα της G. Άρα $e_G \in H$.
Συνεπώς $H \neq \emptyset$.
Έστω $a, b \in H$. Αφού H υποομάδα και $b \in H$ έπεται $b^{-1} \in H$.
Άρα αφού H υποομάδα και $a, b^{-1} \in H$ έχουμε $a * b^{-1} \in H$.
2) ⇒ 1) Άρα $H \neq \emptyset$, υπάρχει $a \in H$. Άρα για $b = a$, $a * b^{-1} \in H$,
δηλαδή $a * a^{-1} \in H$ συνεπάγεται $e_G \in H$.

Έστω $b \in H$. Τότε αφού $e_G \in H$, $e_G * b^{-1} \in H$. Άρα $b^{-1} \in H$.

Ισχυρισμός: Έστω $b \in G$. Τότε $(b^{-1})^{-1} = b$
Απόδειξη: Έχουμε $b * b^{-1} = e_G$ και
$$(b^{-1})^{-1} * b^{-1} = e_G$$
Αφού $(G, *)$ ομάδα, από κανόνα διαγραφής $(b^{-1})^{-1} = b$.
Έστω τώρα $a, b \in H$. Δείξαμε $b^{-1} \in H$. Άρα υπό υπόθεση
$$a * (b^{-1})^{-1} \in H \underset{\text{ισχ.}}{\Rightarrow} a * b \in H$$

Συνεπώς H υποομάδα της G.

Πρόταση: Αν $(G, *)$ ομάδα και $b \in G$ τότε $(b^{-1})^{-1} = b$
Απόδειξη: Έγινε στο προηγούμενο ισχυρισμό!

Παρατήρηση: Έστω $(G, *)$ αβελιανή ομάδα που γράφεται προσθετικά και H υποσύνολο της G.
Η πρόταση μας λέει ότι H υποομάδα της G αν-ν $H \neq \emptyset$ και $a, b \in H$ συνεπάγεται $a - b \in H$.

Παράδειγμα: Δείξτε ότι το σύνολο H των άρτιων ακεραίων είναι υποομάδα της ομάδας $(\mathbb{Z}, +)$
Απόδειξη: $H \neq \emptyset$ γιατί $0 \in H$.
Έστω $a, b \in H$ τότε a, b άρτιοι συνεπώς και $a - b$ άρτιος άρα $a - b \in H$. Άρα H υποομάδα της $(\mathbb{Z}, +)$

Πρόταση: Έστω $(G,*)$ ομάδα. Το $H = G$ είναι υποομάδα της G.

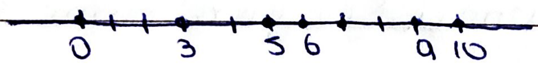
Απόδειξη: Φανερά $e_G \in G$ αν $a,b \in G$ τότε $a*b \in G$ και αν $a \in G$ τότε $a^{-1} \in G$. Άρα G υποομάδα της G.

Πρόταση: Έστω $(G,*)$ και H το μονοσύνολο $\{e_G\}$.
Τότε $\{e_G\}$ υποομάδα της G.
Απόδειξη: Φανερά $e_G \in H$. Αφού $e_G * e_G = e_G$ και $(e_G)^{-1} = e_G$ το αποτέλεσμα έπεται.

Ορισμός: Το $\{e_G\}$ λέγεται η ΤΕΤΡΙΜΜΕΝΗ υποομάδα της G. Μια υποομάδα H της G, λέγεται ΓΝΗΣΙΑ αν $H \neq G$.

Ερώτημα: Είναι η ένωση υποομάδων, υποομάδα; Είναι η τομή υποομάδων, υποομάδα;

Παράδειγμα: Έστω $G = (\mathbb{Z}, +)$ και $H_1 =$ τα πολλαπλάσια του 3
$H_2 =$ τα πολλαπλάσια του 5.
Τα H_1, H_2 είναι υποομάδα της G γιατί $H_1 \neq \emptyset$ και αν a,b πολλαπλάσιο του 3 τότε $a-b$ πολλαπλάσιο του 3 και $H_2 \neq \emptyset$ και αν a,b πολλαπλάσιο του 5 τότε $a-b$ πολλαπλάσιο του 5.
Είναι το $H_1 \cup H_2$ υποομάδα της G;



Έχουμε $3 \in H_1 \cup H_2$, $5 \in H_1 \cup H_2$ αλλά $3+5 = 8 \notin H_1 \cup H_2$ γιατί $8 \notin H_1$ αφού δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 και $8 \notin H_2$ αφού δεν είναι πολλαπλάσιο του 5. Άρα $H_1 \cup H_2$ ΟΧΙ υποομάδα της G.

Ισχυρισμός: $H_1 \cap H_2 =$ πολλαπλάσιο του 15 και $H_1 \cap H_2$ υποομάδα της G.
Απόδειξη: ΑΣΚΗΣΗ.

Πρόταση: Έστω $(G,*)$ ομάδα και H_1, H_2 υποομάδες της G. Τότε $H_1 \cap H_2$ υποομάδα G.

Απόδειξη: Από Πρόταση, αρκεί να δείξουμε $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$ και αν $a, b \in H_1 \cap H_2$ τότε και $a * b^{-1} \in H_1 \cap H_2$.

Πράγματι, αφού H_1 υποομάδα της G, $e_G \in H_1$ και αφού H_2, υποομάδα της G, $e_G \in H_1$ και αφού H_2 υποομάδα της G, $e_G \in H_2$ άρα $e_G \in H_1 \cap H_2$.

Συνεπώς $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$.

Έστω $a, b \in H_1 \cap H_2$ τότε $a \in H_1$ και $b \in H_1$ άρα $a * b^{-1} \in H_1$ (1)

Επίσης $a \in H_2$ και $b \in H_2$ άρα αφού H_2 υποομάδα

$$a * b^{-1} \in H_2 \quad (2)$$

Από (1) και (2) $a * b^{-1} \in H_1 \cap H_2$.

Συνεπώς από Πρόταση $H_1 \cap H_2$ υποομάδα της G.

Πρόταση: Έστω $\emptyset \neq I$ σύνολο δεικτών, $(G,*)$ ομάδα και για κάθε $i \in I$, H_i υποομάδα της G. Τότε $\bigcap_{i \in I} H_i$ = υποομάδα της G.

Με άλλα λόγια η τομή οποιουδήποτε πλήθους υποομάδων είναι υποομάδα.

Απόδειξη: ΑΣΚΗΣΗ (τα επιχειρήματα στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης για τομή δύο υποομάδων γενικεύονται εύκολα).

Ορισμός: Έστω $(G,*)$ ομάδα και $a \in G$. Θέτουμε

$$\langle a \rangle = \{ a^k \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

Πρόταση: Το $\langle a \rangle$ είναι υποομάδα της G. Ονομάζεται Η ΚΥΚΛΙΚΗ ΥΠΟΟΜΑΔΑ ΤΗΣ G, που παράγεται από το a.

Απόδειξη: Έχουμε $a^0 = e_G$
άρα $e_G \in \langle a \rangle$. Έστω $c, d \in \langle a \rangle$.
Τότε υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ με $c = a^{k_1}$, $d = a^{k_2}$
Άρα, $c * d = a^{k_1} * a^{k_2} \underset{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}{=} a^{k_1+k_2} \in \langle a \rangle$

Επιπλέον από Πρόταση $c^{-1} = (a^{k_1})^{-1} = a^{-k_1} \in \langle a \rangle$
Άρα $c^{-1} \in \langle a \rangle$, Συνεπώς $\langle a \rangle$ είναι υποομάδα της G.

Παρατήρηση: Έστω $(G, *)$ και $a \in G$. Τότε $a \in \langle a \rangle$ γιατί $a = a^{-1}$. Από την Πρόταση $\langle a \rangle$ υποομάδα της G. Επίσης αν H υποομάδα της G με $a \in H$ τότε $a^k \in H$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, άρα $\langle a \rangle \subset H$

Συμπέρασμα: Η υποομάδα $\langle a \rangle$ της G είναι η ελάχιστη υποομάδα της G, που περιέχει το a.

Παράδειγμα: $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ και $a = 4 \in G$.
Ποιά είναι η $\langle a \rangle$;
Απάντηση:
$$\langle a \rangle = \{1 = 4^0\} \cup \{4^k : \underset{k>0}{k \in \mathbb{Z}}\} \cup \{\frac{1}{4^k} : \underset{k>0}{k \in \mathbb{Z}}\}$$

γιατί για $k>0$ $4^{-k} = (4^{-1})^k = \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{4^k}$

Παράδειγμα: Έστω $G = (\mathbb{R}, +)$ και $a = 4$. Ποια είναι η υποομάδα $\langle a \rangle$ της G;
Απάντηση,
$\langle a \rangle = \{0 \cdot 0 = 0\} \cup \{k \cdot 4, k \in \mathbb{R}, k>0\} \cup \{k \cdot 4 : k \in \mathbb{Z}, k<0\}$
$=$ τα πολλαπλάσια του 4 στο $\mathbb{Z} = \{4m \mid m \in \mathbb{Z}\} =$
$= \{\ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\}$